フィードバック制御下のHarada-Sasa等式とその制限(非平衡系の物理-非平衡ゆらぎと集団挙動-,研究会報告)

AUTHOR(S):

伊藤, 創祐; 佐野, 雅己

CITATION:

伊藤, 創祐 ...[et al]. フィードバック制御下のHarada-Sasa等式とその制限(非平衡系の物理-非平衡ゆらぎと集団挙動-,研究会報告). 物性研究 2011, 96(1): 181-182

ISSUE DATE:

2011-04-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/169472

フィードバック制御下のHarada-Sasa等式とその制限

東京大学 理学系研究科　　伊藤創祐[1], 佐野雅己

1 Introduction

近年、非平衡状態の遷移とエントロピー生成の関係の理解がゆらぎの定理やJarzynski等式の発見によって進んでいる。これらの定理、等式は経路の確率に関する"Local detailed balance"を前提として成立する。また"Local detailed balance"は、古典系における"Maxwellの悪魔"の問題である、情報とエントロピー生成の関係の理解の前提ともなっている[1]。一方で、経路の確率を用いて、その摂動依存性から揺動散逸定理の一般化がなされており[2]、この一般化はLangevin系において、エネルギー散逸率と揺動散逸定理の破れの関係式であるHarada-Sasa等式[3]を含んでいる。

そこでわれわれは、フィードバックのある非平衡遷移中でのHarada-Sasa等式相当の表式から、揺動散逸定理の破れの相互情報量に関する制限式を導出した。この制限式は力学的なフィードバックによって有効温度を下げる場合[4]の、測定誤差に関する有効温度の理論的下限を示している。

2 Approach

フィードバック効果を入れたLangevin方程式

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = F_y(t) + \epsilon f_p(t) + \xi(t) \tag{1}$$

を考える. ξは平均0分散$\frac{2\gamma}{\beta}$ $(\beta = \frac{1}{k_B T})$の白色ガウスノイズとする。時刻$t=0$から$t=\tau$までの遷移を考え、フィードバック効果は以下のように導入する。

1. 時刻$t = t_{M_i}$でi回目の測定を行う. $(0 \leq t_{M_1} < \ldots < t_{M_i} < \ldots < t_{M_n} \leq \tau)$
2. 相空間$\Gamma_{M_i} \equiv (x(t_{M_i}), \dot{x}(t_{M_i}))$に対し, 条件付き確率$P_i(y_i|\Gamma_{M_i})$で測定結果$y_i$を得る.
3. $F_y(t)$は時刻$t = t_{M_i}$以降にy_iに依存して時間発展することができる.

このとき測定結果$y(\equiv \{y_1, \ldots, y_n\})$を固定したときの経路の確率は、経路積分表示で得ることができ、その経路の確率からLocal detailed balanceを経てgeneralized Jarzynski equality[1]が得られる。ここからLangevin系における熱力学第二法則の一般化を得ることが可能である。一方でHarada-Sasa等式相当についても、経路積分表示の摂動依存性を用いて得ることができる。

[1]E-mail: sosuke@daisy.phys.s.u-tokyo.ac.jp

3 Result

フィードバック制御下での Harada-Sasa 等式の表現

$$\gamma\left\{\langle\dot{x}(\tau)\dot{x}(\tau)\rangle_{\epsilon=0}-\frac{2}{\beta}R(\tau;\tau)\right\}=\langle\dot{x}(\tau)F_y(\tau)\rangle_{\epsilon=0}-\langle m\dot{x}(\tau)\ddot{x}(\tau)\rangle_{\epsilon=0} \tag{2}$$

と、フィードバック制御下での熱力学第二法則の拡張

$$\beta\int_0^\tau ds\,\langle\dot{x}(s)F_y(s)\rangle_{\epsilon=0}-\beta\left\langle\frac{m\dot{x}^2}{2}(\tau)-\frac{m\dot{x}^2}{2}(0)\right\rangle_{\epsilon=0}-\langle\ln\rho(\tau)-\ln\rho(0)\rangle_{\epsilon=0}\geq-\left\langle\sum_i I_i\right\rangle_{\epsilon=0} \tag{3}$$

が得られた。$R(t;t)$ は応答関数であり、I_i は i 回目の測定における測定結果 y_i と相空間 Γ_i 間の相互情報量、$\rho(t)$ は時刻 t での確率密度分布である。式 (2) は終時刻 τ のとり方に依らず成り立つので、式 (2)、(3) から揺動散逸定理の破れに対する相互情報量に対する制限式

$$\beta\int_0^\tau ds\gamma\left\{\langle\dot{x}(s)\dot{x}(s)\rangle_{\epsilon=0}-\frac{2}{\beta}R(s;s)\right\}\geq\langle\ln\rho(\tau)-\ln\rho(0)\rangle_{\epsilon=0}-\left\langle\sum_i I_i\right\rangle_{\epsilon=0} \tag{4}$$

が得られる。この結果は Langevin 系における非平衡なフィードバック過程で一般に成り立つ。

われわれはまた、粒子の速度を測定し、ガウス分布の誤差で測定結果をえて、得られた結果に対して負の係数をかけた外力を加え、一定時間遷移させるという一連のループを繰り返すモデルを解析的に計算した。このモデルは系の有効温度を下げる特徴的な系であり、計算の結果パラメータによらず式 (4) が成り立つことを示した。

このモデルにおいて分布が定常なガウス分布の時、相互情報量は定常分布の分散と測定誤差の分散の比 σ_r で、$\ln(1+\sigma_r^2)$ とかける。つまり、式 (4) は力学的なフィードバックにおいて有効温度を下げる過程での、測定誤差による有効温度の下限をあらわしているとみなせる。

特にフィードバックによって達成される定常状態を仮定して、$R(s;s)=\frac{1}{2m}$ とし、$\frac{m}{2}\langle\dot{x}^2(s)\rangle_{\epsilon=0}=\frac{kT_{eff}}{2}$ と有効温度 T_{eff} を揺動項と散逸項の比で定義すると、式 (4) は

$$\frac{T-T_{eff}}{T}\leq\left\langle\sum_i^{t_{M_i}\in\left[0,\frac{m}{\gamma}\right]} I_i\right\rangle \tag{5}$$

となる。これは平衡に緩和する時間スケール $\frac{m}{\gamma}$ 間に得られた全情報量が、達成できる有効温度 T_{eff} の下限を決定しているという表式である。

Reference

[1] T. Sagawa and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **104** 090602 (2010).

[2] M. Baiesi, C.Maes and B. Wynants, Phys. Rev. Lett. **103** 010602 (2009).

[3] T. Harada and S. Sasa , Phys. Rev. Lett. **95** 130602 (2005).

[4] G. Jourdan *et al.*, Nanotechnology.**18** 475502 (2007).